

物 理 問 題

(解答はすべて物理解答用紙に記入すること)

[1] 図1のように、固定した台Aの上に台Bをおき、さらに台Bをばね定数が k で質量の無視できるばねで台Aに接続した。台Bは台Aの上を水平方向に移動できる。ばねの長さは十分長く、台Aと台Bの間の摩擦は無視できる。台Aと台Bの左側は水平面からの角度 θ の斜面となっている。台Aの斜面上端を原点 O として、図1のように x 軸および y 軸をとる。台Bの水平方向の位置は、台Bの斜面下端の x 座標で測ることにする。台Aの斜面と台Bの斜面が段差なくつながっている状態で $x = 0$ となる。このとき、ばねの長さは自然長となっている。

質量 m の小物体を台Aの斜面下方から斜面にそって打ち上げる実験をする。台Aと台Bの斜面は十分なめらかであり、小物体に摩擦力は働かない。台Bの斜面は十分長く、小物体が斜面から飛び出すことはない。小物体の速さは、原点 O を通過する瞬間に v_0 であった。台Bの質量を M 、重力加速度の大きさを g とする。以下の問に答えよ。

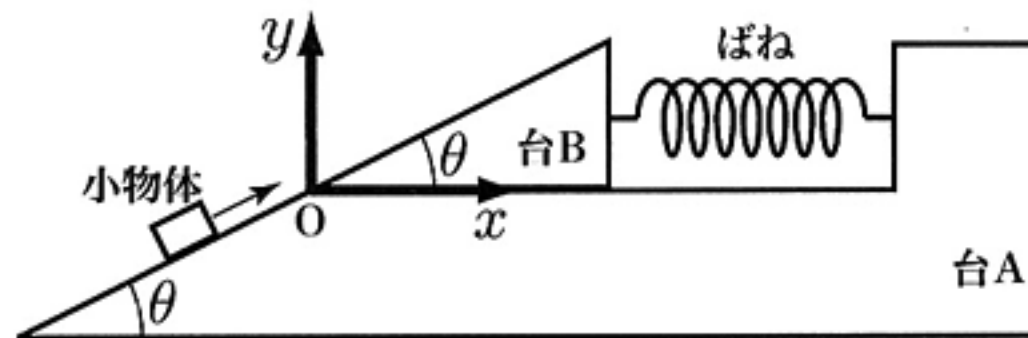


図1

I. まず、台Bを $x = 0$ の位置に固定した状態で実験を行った。

問 1 小物体は台Bの斜面上を上方へすべりながらしだいに遅くなり、やがて最高点に達した後、斜面をすべり降り始めた。小物体が最高点に達したときの小物体の y 座標を、 v_0 、 m 、 M 、 g 、 θ のうち必要なものを用いて表せ。

II. 次に、台 B の固定をはずして $x = 0$ の位置に静止させた状態から再び実験を行った。小物体は台 B の斜面に乗り移った後、台 B の斜面から離れずに運動を続けた。また、小物体が台 B の斜面にあるときには、台 B は水平方向に運動した。このときの台 B の x 軸正の向きの加速度を a とする。

問 2 小物体が台 B の斜面を運動しているときの様子を台 B の上にいる観測者からみると、小物体は慣性力と重力と垂直抗力を受けて運動している。小物体は斜面から離れないので、小物体に働く力の斜面に垂直な方向の成分はつり合っている。小物体が斜面から受ける垂直抗力の大きさを、 a , m , M , g , θ のうち必要なものを用いて表せ。

問 3 小物体が台 B の斜面を運動しているときの、台 A の上にいる観測者から見た台 B の運動方程式を考える。すると、台 B の加速度 a は台 B の位置 x によってきまり、 $a = a_0 - b_0x$ の形に整理できる。 a_0 および b_0 を、 m , M , g , θ , k のうち必要なものを用いてそれぞれ表せ。

このように、台 B の加速度は単振動の加速度を表す式と同じ形をしている。したがって、小物体が台 B の斜面にあるとき、台 B はつり合いの位置を中心として水平方向に単振動を行うであろう。

問 4 この単振動の振幅を、 a_0 , b_0 , m , M のうち必要なものを用いて表せ。

問 5 この単振動の角振動数 ω を、 a_0 , b_0 , m , M のうち必要なものを用いて表せ。

III. v_0 を変化させて実験を繰り返した。 v_0 がある値のとき、小物体が台 B の斜面下端に戻った瞬間に台 B が原点 O に戻ったため、小物体がそのままなめらかに台 A の斜面へ移ってすべり続ける様子が観察された。この現象に関して考察しよう。

小物体は台 B の斜面をなめらかにすべるので、小物体と台 B の間には垂直抗力しか働かない。これを考慮して、図 2 のように小物体の運動を点 O を原

点にとった斜面方向 (x' 軸方向) と斜面に垂直な方向 (y' 軸方向) に分解して考える。このとき台 B は単振動をしているので、小物体の y' 軸方向の運動も単振動となる。

問 6 小物体の加速度の x' 方向の成分を、 g と θ を用いて符号を含めて表せ。

問 7 小物体の x' 方向の運動を考察することにより、小物体が最初に $x' = 0$ の点を通過してから再び $x' = 0$ の点に戻ってくるまでの時間を、 g , v_0 , m , θ のうち必要なものを用いて表せ。なお、この運動の途中で小物体が台 A に衝突する可能性については考える必要はない。

問 8 小物体が $x' = 0$ の点に戻ったときに台 B も原点 O に戻っていれば、小物体はそのままめらかに台 A の斜面へ移ってすべり続けることができる。この条件を満たす v_0 を V とし、 V を、 g , ω , θ , n のうち必要なものを用いて表せ。ただし、 n は自然数とする。

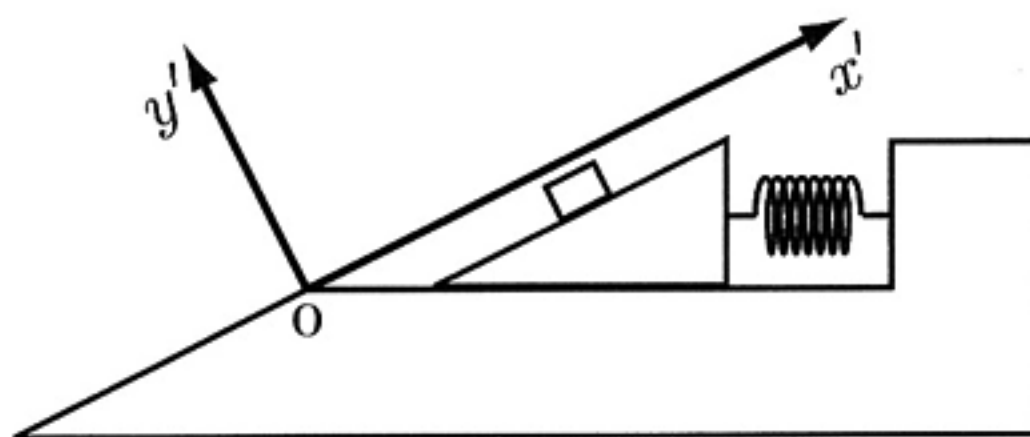


図 2

〔2〕 真空中における電子の運動を考える。電子の質量を m 、電荷を $-e$ ($e > 0$) とする。重力の影響は無視できるものとする。

I. 電子源から電子を発生させた。この電子を、電位差 V ($V > 0$) で加速した。ただし、電子の初速度は無視できるものとする。

問 1 加速後の電子の速さを求めよ。

II. 図1および図2のように、一様な磁束密度 B の磁場（磁界）が $y > 0$ の領域にある。磁場の向きは、紙面裏から表向きである。磁場に対して垂直な xy 平面内で、速さ v の電子を原点 O から磁場中に入射したところ、大きさ evB のローレンツ力を受けて運動した。電子を磁場中に入射したときの時刻を 0 とする。

問 2 図1のように、速さ v の電子を x 軸に対して垂直に入射したところ、円運動をはじめたが、半円を描いたところで、磁場のある領域から外に飛び出した。電子が磁場のある領域から飛び出すときの時刻と x 座標を求めよ。

問 3 次に、図2のように、速さ v の電子を x 軸に対して角度 ϕ [rad] ($0 < \phi < \frac{\pi}{2}$) で入射した。磁場中と、磁場のある領域から飛び出した後の電子の軌跡を図示せよ。また、磁場のある領域から飛び出すときの時刻と x 座標も求めよ。

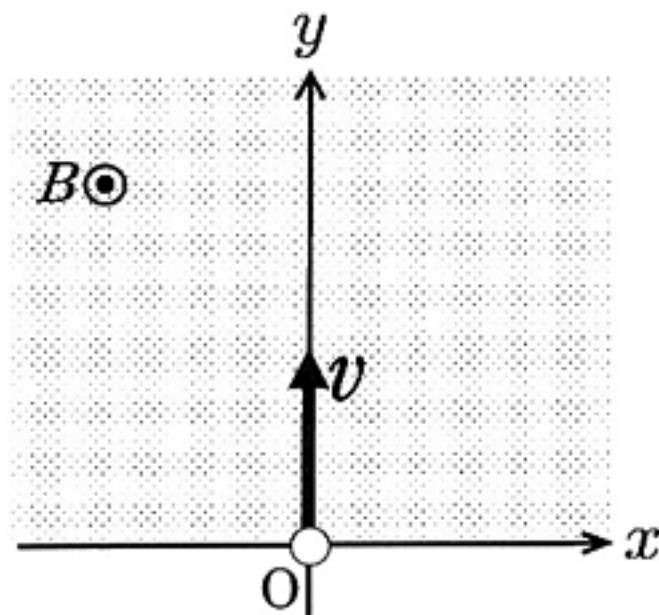


図1

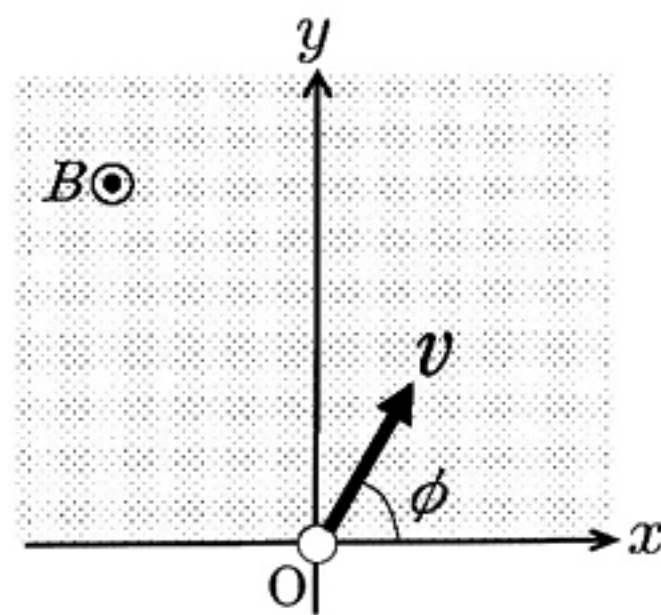


図2

Ⅲ. 一様な磁束密度 B の磁場が全空間にある。磁場の向きは z 軸の正の向きである。

問 4 電子を原点 O から磁場の向きに入射した。電子はどのような運動をするか。理由とともに述べよ。

次に、図 3 のように、速さ v_0 の電子を磁場の向きと角度 θ [rad] ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) で原点 O から入射した。なお、電子の原点における速度ベクトルの xy 平面成分は、図 3 のように x 軸の正の向きと角度 ϕ [rad] ($0 \leq \phi < 2\pi$) をなしている。すると、電子はらせん運動をした。つまり、電子は、 z 軸の方向からみたときは等速円運動、 z 軸方向には等速度運動をした。

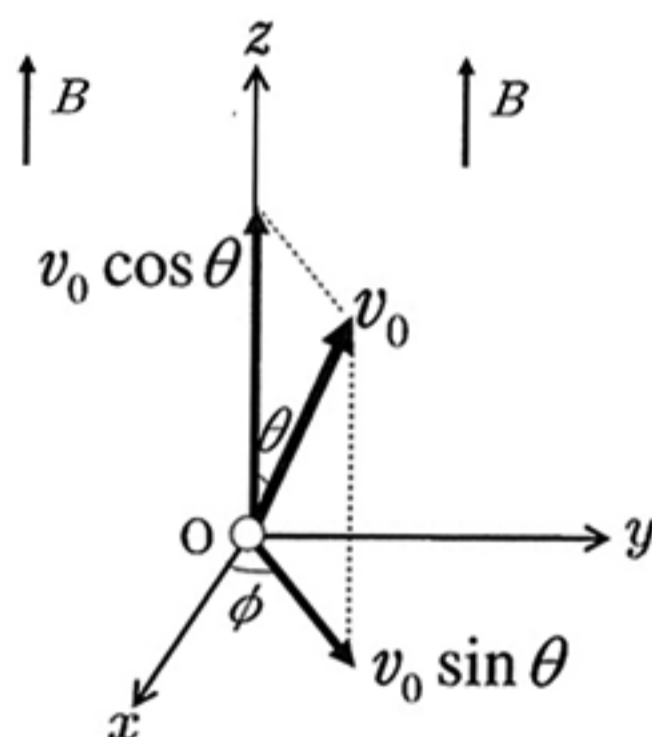


図3

問 5 この電子の等速円運動の半径と周期を求めよ。

問 6 電子がこの等速円運動により一周する間に、 z 軸方向に進む距離 L を求めよ。

問 7 z 軸上の $z = 3L$ の位置に、大きさの無視できる電子検出器を置いた。入射角度は変えずに、入射する電子の速さを、はじめの速さ v_0 から連続的に大きくしていった。すると、電子は、速さ v_0 のときに検出され

ていたが、 v_0 より大きくなると検出されなくなり、ある速さで再び検出された。この時の電子の速さは、はじめの速さ v_0 の何倍であるかを求めよ。

IV. III と同じ磁場中に、 z 軸を中心軸とし、 z 軸方向に十分長くのびた半径 R の円筒を置いた。この円筒に電子が接触すると、電子は吸収される。また、円筒は磁場の大きさや向きに影響を与えないものとする。速さ v の電子を磁場の向きと角度 θ [rad] で原点 O から入射した。

問 8 角度 θ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) で入射した電子が、円筒の壁に吸収されないための、電子の速さ v の条件を求めよ。

問 9 円筒の半径を $R = \frac{4\sqrt{2}mv}{3eB}$ とする。 z 軸上の $z = \pi R$ の位置に、大きさの無視できる電子検出器を置き、速さ v の電子を入射した。入射角度 $\theta = 0$ のとき、電子は検出されていた。しかし、 θ が 0 より大きくなると電子は検出されなくなり、ある角度で再び検出された。さらに、 θ を大きくすると電子は検出されなくなった。このように、入射角度 θ を 0 から大きくするにつれて、電子は検出されたり、検出されなかったりを繰り返す。電子が検出されたときの $\cos\theta$ をすべて求めよ。

[3] 図のように外部からの操作でなめらかに動くピストンが入ったシリンダーを用いて、単原子分子理想気体（以下、気体と呼ぶ）を増圧することを考える。シリンダーの右室と左室にはそれぞれ気体導入弁（以下、弁と呼ぶ）が付いている。弁は通常は閉じているが、室内の圧力が P_0 [Pa] より少しでも下がると弁は開いて外部から気体を供給し、室内の圧力は P_0 に保たれる。またピストン内には両室をつなぐ接続バルブが付けられている。接続バルブを開けたときには、右室と左室の圧力は等しくなる。気体は常に絶対温度 T_0 [K] に保たれており、接続バルブの体積は無視できるとする。いま接続バルブを開け、ピストンを左に動かして右室と左室の体積がそれぞれ V_1 [m³], V_2 [m³] ($\frac{V_1}{V_2} = a, a > 1$) になるようにし、両室に圧力 P_0 の気体を導入した（初期状態）。

初期状態から接続バルブを閉じ、ピストンをゆっくりと右側に動かして、右室の体積が V_2 になるまで圧縮した。この状態を状態 1 とする。続いてピストンを固定して接続バルブを開放した。この状態を状態 2 とする。再び接続バルブを閉じた後、ピストンを左室の体積が V_2 になるまでゆっくりと動かした。この状態を状態 3 とする。その後、ピストンを固定して接続バルブを開放した。この状態を状態 4 とする。最後に、接続バルブを閉じてピストンをゆっくりと右側に動かし、右室の体積が V_2 になるまで圧縮した。この状態を状態 5 とする。状態 1 の左室、状態 3 の右室、状態 5 の左室は、途中で弁が開いたため、圧力が P_0 となっている。気体定数を R [J/mol·K] とし、単原子分子理想気体の定積モル比熱は $\frac{3}{2}R$ で与えられる。

問 1 初期状態で右室にある気体の物質質量 n_0 [mol] を、 P_0, V_1, T_0, R を用いて表せ。

問 2 状態 2 の左室の圧力を、 P_0 と a を用いて表せ。

問 3 状態 2 の左室の気体の内部エネルギーは、状態 1 の左室の気体の内部エネルギーと比べてどれだけ大きいか。その差を P_0, V_1, T_0, a から必要なものを用いて表せ。

- 問 4 状態2から状態3に至る過程で、右室の弁が開いて気体が導入されはじめるのは、右室の体積が V_2 の何倍になったときか。 a を用いて答えよ。
- 問 5 状態2から状態3に至る過程で、右室の弁が開いた後に右室の気体がピストンに行った仕事を、 P_0 、 V_1 、 T_0 、 a から必要なものを用いて表せ。
- 問 6 $a = 7$ の場合に、初期状態から状態3に至る右室の体積と圧力の変化を解答用紙のグラフ用紙に示せ。また、初期状態、状態1、2、3を明示せよ。
- 問 7 初期状態から状態1に至る過程で右室の気体がピストンから受けた仕事と、状態2から状態3に至る過程で右室の気体がピストンにした仕事の差は、問6で得られたグラフのどの部分の面積に等しいか、解答用紙の図中に斜線で示せ。
- 問 8 この操作を無限に続けていくと、体積が V_2 に圧縮された気体（状態1、3、5、…）の圧力は次第に増加していくが、最終的に到達できる圧力には上限値がある。 $a = 7$ の場合に、その上限値を P_0 を用いて表せ。

